

Seria 8

Zadanie 1

Wagon kolejowy porusza się po torze prostoliniowym z prędkością $V(t)$. W wagonie chłopcy bawią się piłką o masie m . Wprowadzając dla piłki współrzędne x i y mierzone **względem wagonu**, uwzględniając siłę ciężkości o potencjale mgy , znajdź lagranżian, a następnie hamiltonian piłki. Wypisz równania Hamiltona i przekonaj się, iż mimo dość nieoczekiwanych wyników pośrednich, równania drugiego rzędu dla współrzędnych wychodzą zgodnie z oczekiwaniami

Zadanie 2

Lagranżian cząstki relatywistycznej w polu elektrycznym o potencjale $\varphi(\vec{r})$ i potencjale wektorowym $\vec{A}(\vec{r})$ jest: $L = -mc^2 \sqrt{1 - \dot{\vec{r}}^2/c^2} - e\varphi(\vec{r}) + e\dot{\vec{r}}\vec{A}(\vec{r})$. Znajdź hamiltonian.

Zadanie 3

Lagranżian cząstki próbnej o masie m w polu grawitacyjnym Schwarzschilda jest $L = -mc^2 \sqrt{(1 - \frac{r_0}{r}) - \frac{1}{c^2} (\frac{dr^2}{1 - \frac{r_0}{r}} + r^2 d\varphi^2)}$, gdzie $r_0 = \frac{2GM}{c^2}$. Znajdź hamiltonian.

Wskazówka. Wynik będzie postaci $H = \sqrt{(\dots)(m^2c^4 + c^2p_r^2(\dots) + \frac{c^2p_\varphi^2}{r^2})}$, gdzie (\dots) to pewne proste wyrażenie zbudowane z współrzędnej r . Nie podaję go, by nie pozbawić Cię przyjemności samodzielnego wyliczenia owego hamiltonianu.

Zadanie 4

Korzystając z hamiltonianu znalezionej w poprzednim zadaniu zbadaj ruch radialny fotonu spadającego w polu grawitacyjnym. W tym celu wypisz równanie Hamiltona dla \dot{r} , następnie połącz w nim $p_\varphi^2 = 0$ i w końcu wykonaj granicę $m \rightarrow 0$. W tej granicy \dot{r} przestaje zależeć od pędu (co nam się podoba) ale nie jest równe c (co nas na chwilę zaskakuje). Gdy minie chwila zaskoczenia, zinterpretuj otrzymany wynik.

Zadanie 5

Znajdź hamiltonian bryły swobodnej o tensorze bezwładności w którym wszystkie trzy momenty bezwładności są różne. Znajdź równanie stanu, zależność energii od temperatury i równanie adiabaty dla gazu zbudowanego z molekuł (co najmniej trójatomowych i niekolinearnych)

Zadanie 6

Jeden mol powietrza sprężony do objętości 1,12 litra ma temperaturę 20°C . Jaką pracę może wykonać ten gaz rozprężany do ciśnienia atmosferycznego w dwóch przypadkach:

- Rozprężania izotermicznego
- Rozprężania adiabatycznego

Pamiętaj o uwzględnieniu nieużytecznej pracy przeciw stałemu ciśnieniu atmosferycznemu.